

آزمون

۱۱

پایه

۱۲



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر



آزمون شماره ۱۱ پایه دوازدهم

دفترچه شماره ۱

۱۴۰۱/۱۲/۱۹

آزمون اختصاصی

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

مدت پاسخ‌گویی: ۸۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۵۰

عنوان مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
۲	هندسه	۱۵	۲۱	۳۵	۲۵ دقیقه
۳	گسسته	۱۵	۳۶	۵۰	۲۵ دقیقه

مواد امتحانی	سرفصل دهم	سرفصل یازدهم	سرفصل دوازدهم
حسابان	—	—	فصل ۵
هندسه	—	فصل ۳ (درس‌های ۳ و ۴)	فصل ۳ (درس ۲)
گسسته	—	فصل ۲ (درس‌های ۳ و ۴)	فصل ۳ (درس ۲)

تمامی حقوق مادی و معنوی آزمون، متعلق به مرکز سنجش آموزش مدارس برتر بوده و هرگونه استفاده از آن بدون داشتن اجازه‌نامه کتبی از این مرکز، خلاف قانون و عرف و قابل پیگیری می‌باشد.



سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۱- تابع $y = x(x^2 - |x|)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x + 9 - 4\sqrt{x+1}$ در بازه $[-1, 8]$ چند برابر مینیمم مطلق آن در همین بازه است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

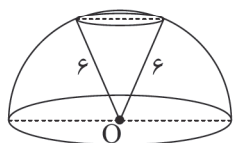
۳- حاصل ضرب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{3-x}$ برابر کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۲ (۴) -۳

۴- خط $y = k$ نمودار سهمی $y = 9 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. حداکثر مساحت دوزنقه‌ای که دو رأس آن A و B و دو رأس دیگر آن نقاط $M(3, 0)$ و $N(-3, 0)$ می‌باشند، چقدر است؟ ($k > 0$)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۱۸ (۴) ۴۸

۵- مطابق شکل، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، محاط درون نیم‌کره‌ای به شعاع ۶ چقدر است؟



- (۱) $2\sqrt{2}$

- (۲) $3\sqrt{3}$

- (۳) $3\sqrt{2}$

- (۴) $2\sqrt{3}$

۶- نمودار تابع $y = \frac{x|x|}{x^2 + 1}$ در دامنهٔ خود از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) صعودی

- (۲) نزولی

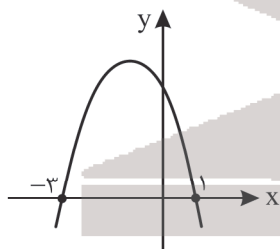
- (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی

- (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۷- تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$ را در نظر بگیرید. اگر در بازه (a, b) هر دو نمودار توابع f و f' ، اکیداً صعودی باشند، حداکثر $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸- نمودار مشتق تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ به صورت زیر است. اگر مقدار ماکزیمم نسبی f برابر ۵ باشد، حاصل $a + b - c$ کدام است؟



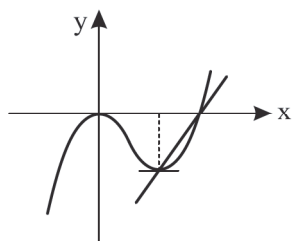
- (۱) -۵

- (۲) -۱۳

- (۳) ۷

- (۴) ۹

۹- مطابق شکل زیر، خط $y = 2x - 3$ از نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^2(ax + b)$ عبور کرده است. مقدار b کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۳

۱۰- اگر $A(-1, 9)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ باشد، طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۴

(۲) -۳

(۱) ۱

۱۱- مجانب‌های تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در نقطهٔ $W(2, -1)$ متقاطع‌اند. اگر $f(1) = 0$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۲- در بازهٔ (a, b) نمودار تابع $y = x(x - 2|x| + 9)$ صعودی و جهت تقعر آن رو به بالاست. حداکثر $b - a$ کدام است؟

(۴) ۶

(۳) $\frac{4}{5}$

(۲) ۳

(۱) $\frac{3}{2}$

۱۳- اگر $x = 2$ و $x = -4$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = x^3 + ax^2 + bx - 2$ باشند نقطهٔ عطف آن در کدام ناحیه قرار دارد؟

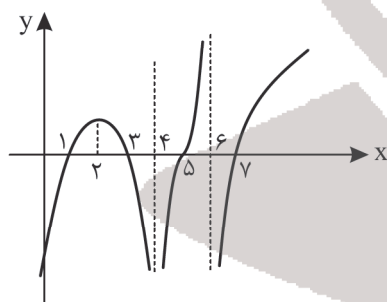
(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

۱۴- نمودار مشتق تابع پیوستهٔ f به صورت زیر است. مجموع طول نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع f کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۹

۱۵- فرض کنید $x = a$ مجانب قائم تابع هموگرافیک f باشد. در این صورت کدام صحیح است؟

(۱) در بازهٔ $(a, +\infty)$ ، f' و f'' هم‌علامت‌اند. (۲) در بازهٔ $(a, +\infty)$ ، f' و f'' مختلف‌العلامت‌اند.

(۳) در بازهٔ $(-\infty, a)$ ، $f' - f''$ منفی است. (۴) در بازهٔ $(-\infty, a)$ ، $f' - f''$ مثبت است.

۱۶- تابع درجه سوم $y = mx^3 + 3x^2 - 3x + 2$ اکسترمم نسبی ندارد. حداکثر طول نقطه عطف آن کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۷- نقطه اکسترمم نسبی تابع $y = \frac{2x+1}{ax^2}$ روی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۸- تابع $f(x) = x^3 + (m-3)x^2 + 3x - 1$ در \mathbb{R} اکیداً صعودی است. طول نقطه عطف تابع در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $[-2, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(-1, 1)$

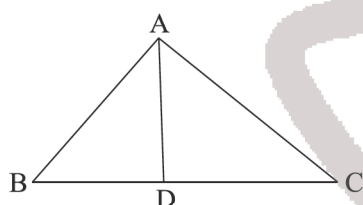
۱۹- تابع $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x}}$ در نقطه $A(1, 2)$ دارای \min نسبی است. $f(4)$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $2/5$

۲۰- فرض کنید نقطه $A(1, 3)$ نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ باشد. کدام نقطه اکسترمم نسبی تابع $g(x) = x^3 + ax + b$ است؟

- (۱) $(-1, -7)$ (۲) $(1, -3)$ (۳) $(-1, 7)$ (۴) $(1, 7)$

۲۱- در مثلث ABC ($AB = 5$, $AC = 6$ و $\hat{B}AD = \hat{C}AD$)، $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$ برابر کدام است؟



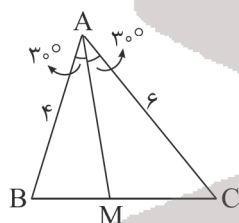
(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{5}{11}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{1}{4}$

۲۲- در شکل زیر، اندازه AM چند برابر $\sqrt{3}$ است؟



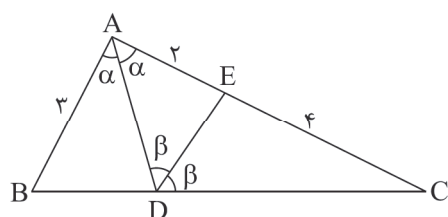
(۱) $\frac{6}{5}$

(۲) $\frac{7}{10}$

(۳) $\frac{11}{10}$

(۴) $\frac{12}{5}$

۲۳- در شکل زیر، اندازه AD برابر کدام است؟



(۱) $\sqrt{6}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{3}$

۲۴- در مثلث ABC ($AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 5$)، نقطه O محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث است. مساحت مثلث AOC کدام است؟

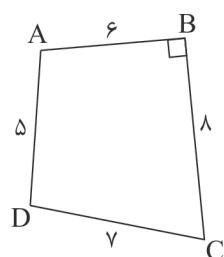
(۴) $10\sqrt{2}$

(۳) $\frac{10}{\sqrt{2}}$

(۲) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

(۱) $\frac{10}{3\sqrt{2}}$

۲۵- مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



(۱) $24 + \sqrt{66}$

(۲) $24 + 2\sqrt{66}$

(۳) $48 + \sqrt{66}$

(۴) $48 + 2\sqrt{66}$

۲۶- معادله سطح گذرا از انتهای چهار بردار $\vec{a} = (-2, 1, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, m)$, $\vec{c} = (0, 3, n)$ و $\vec{d} = (m-2, n-4, 6)$ به صورت

$z = 6$ حاصل ضرب داخلی $\vec{a} \cdot \vec{d}$ برابر کدام است؟

(۴) -30

(۳) -15

(۲) 30

(۱) 15

۲۷- دو بردار $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ مفروضند. اگر بردار $\vec{c} = (m+1, -1, 2m)$ بر بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد آنگاه m برابر کدام است؟

(۴) $\frac{5}{7}$

(۳) $\frac{5}{14}$

(۲) $-\frac{5}{7}$

(۱) $-\frac{5}{14}$

۲۸- بردارهای \vec{a} , \vec{b} و \vec{c} با اندازه‌های به ترتیب ۳، ۵ و ۶ در تساوی $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ صدق می‌کنند. حاصل ضرب داخلی دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) 1

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) -1

۲۹- نقاط $A(-8, -10, 2)$, $B(-2, -10, -4)$ و $C(-6, -14, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. تصویر قائم بردار \overrightarrow{AB} روی

بردار \overrightarrow{AC} کدام است؟

(۴) \overrightarrow{AC}

(۳) \overrightarrow{BC}

(۲) $2\overrightarrow{BC}$

(۱) $2\overrightarrow{AC}$

۳۰- اگر $\vec{a} = (1, -1, m)$ و $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$ و تصویر بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ روی محور x ها برابر ۵- باشد، آنگاه m برابر کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۲

۳۱- بردارهای $\vec{a} = (2, \alpha, -1)$ و $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ در فضا مفروض هستند. اگر بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ موازی بردار $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

باشد، مقدار α کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۵

(۳) ۱ (۴) هیچ مقداری برای α به دست نمی آید.

۳۲- مساحت متوازی الاضلاعی که روی بردارهای \vec{a} و \vec{b} ساخته شده است برابر با $2\sqrt{3}$ است. مساحت مثلثی که دو ضلع آن بردارهای

$2\vec{a} - 3\vec{b}$ و $\vec{a} + 2\vec{b}$ است، کدام می باشد؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $7\sqrt{3}$

۳۳- اگر \vec{b} بردار یکجه، $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ و $2\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{c} - \vec{a}$ باشد، آنگاه اندازه بردار \vec{a} برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۴- بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض هستند. اگر $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ باشد، آنگاه $|\vec{b}|$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۵- اگر $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 4$ ، آنگاه حجم متوازی السطوحی که بردارهای $2\vec{a} + \vec{c}$ ، $\vec{b} - \vec{c}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ سه یال همرس آن باشند، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۶- یک زیر مجموعه از اعداد طبیعی با حداقل تعداد اعضا انتخاب کرده ایم. تعداد اعضا چقدر باشد تا دست کم ۳ عدد یافت شوند که باقی مانده تقسیم آنها بر ۹ و رقم یکان آنها یکسان باشد؟

- (۱) ۱۶۳ (۲) ۱۸۱ (۳) ۹۱ (۴) ۱۶۲

۳۷- حداقل چند زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو زیر مجموعه مجزا (بدون اشتراک) در آنها وجود دارد؟

- (۱) ۱۲۹ (۲) ۲۵۷ (۳) ۳۷۱ (۴) ۷۳

۳۸- اگر مجموعه $\{85, 81, 77, \dots, 13, 9, 5, 1\}$ را در نظر بگیریم از این مجموعه حداقل چند عضو انتخاب کنیم که مطمئن باشیم حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموعشان ۹۰ است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۳۹- در کیسه‌ای ۵۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۵۰ وجود دارد. حداقل چند کارت از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم حاصل ضرب عددهای خارج شده مضرب ۴ است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۲۷

۴۰- چه تعداد از عضوهای مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۳۰۰\}$ مضرب ۳ هستند ولی نه مضرب ۴ و نه مضرب ۷ هستند؟

(۱) ۸۸ (۲) ۶۴ (۳) ۷۵ (۴) ۶۷

۴۱- رمز یک قفل عددی سه‌رقمی است که در آن هر یک از رقم‌های ۲ و ۵ حداقل یک بار ظاهر شده است. اگر حداکثر زمان لازم برای باز شدن قفل ۱۳ دقیقه باشد امتحان کردن هر رمز چند ثانیه طول می‌کشد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۴۲- به چند حالت ۴ جایزه متفاوت را بین ۷ نفر می‌توان توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداکثر یک جایزه برسد؟

(۱) ۳۵ (۲) ۸۴۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۳۵۰

۴۳- ۵ فیلم را به چند حالت می‌توانیم به ۳ داور (۱) و (۲) و (۳) برای بررسی واگذار کنیم به طوری که به نفرات (۱) و (۲) حداقل یک فیلم واگذار شده باشد؟

(۱) ۱۸۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۱۲۰

۴۴- درون جعبه‌ای ۲۴ سیب قرمز و ۱۸ سیب زرد وجود دارد. اگر ۱۶ سیب قرمز سالم باشد تعداد سیب‌های زرد معیوب چقدر باشد تا زرد بودن و معیوب بودن مستقل باشند؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۴۵- مردی به احتمال $\frac{۷۵}{۱۰۰}$ در مسابقه‌ای برنده می‌شود. احتمال اینکه پسر او در مسابقه برنده شود $\frac{۶}{۱۰۰}$ و احتمال اینکه پدر در مسابقه‌ای که پسرش برنده شده است، برنده شود برابر $\frac{۶۵}{۱۰۰}$ است. احتمال اینکه پدر و پسر هیچکدام در این مسابقات برنده نشوند چقدر است؟

(۱) $\frac{۳۵}{۱۰۰}$ (۲) $\frac{۸}{۱۰۰}$ (۳) $\frac{۴}{۱۰۰}$ (۴) $\frac{۲}{۱۰۰}$

۴۶- دو کیسه داریم که کیسه اول شامل ۴ مهره سبز و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۴ سبز و ۴ سیاه است. از یکی از این دو کیسه به تصادف مهره‌ای برداشته و در کیسه دیگر می‌گذاریم و سپس از کیسه اخیر مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال آنکه هر دو مهره خارج شده سبز باشند کدام است؟

(۱) $\frac{۵۵۰}{۷۵۶}$ (۲) $\frac{۲۷۵}{۷۵۶}$ (۳) $\frac{۴۸}{۵۷}$ (۴) $\frac{۱۶}{۵۷}$

۴۷- سؤالات یک آزمون از سه کتاب A و B و C به ترتیب به میزان ۶۰، ۳۰، ۱۰ درصد تهیه می‌شود. معمولاً سؤالات انتخابی از کتاب‌های A، B و C به ترتیب ۴٪، M درصد و ۱۰ درصد آسان هستند. اگر در این آزمون معمولاً $\frac{4}{9}$ درصد سؤالات آسان باشد M کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۲۵

۴۸- در ظرفی ۴ مهره سبز و ۵ مهره آبی وجود دارد. مهره‌ای از آن خارج کرده، رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و مجدداً آن را به ظرف برمی‌گردانیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهره سبز خارج شده باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{40}{81}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{10}{27}$

۴۹- دو ظرف داریم، اولی شامل ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و دومی شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر بخواهیم احتمال سیاه یا سفید بودن مهره یکسان باشد، چند مهره سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۰- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. از میان آنها یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه او خواهر بزرگ‌تری داشته باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{31}{32}$ (۲) $\frac{17}{32}$ (۳) $\frac{15}{32}$ (۴) $\frac{1}{2}$

